

Remarque :

La fonction $y_2 = x$ étant le même dans les 4 cas (a,b,c et d) On conçoit que la condition de convergence est liée à la forme de $F(x)$

2) Convergence du processus itératif

Soit x^* , la solution de $f(x) = 0$

Alors

$$x^* = F(x^*)$$

A partir de $x^{(0)}$

$$X(1) = F(x^{(0)})$$

D'où

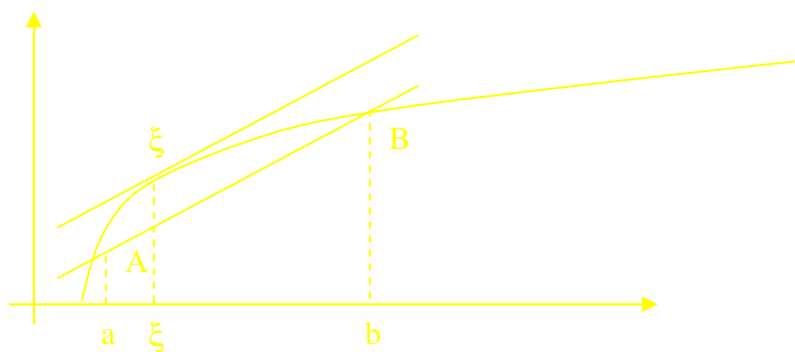
$$x^* - x(1) = F(x^*) - F(x^{(0)})$$

Théorème des accroissements finis

F , continue et dérivable sur $[a,b]$ (classe $C1$)

$$\exists a,b,\xi / (F(b) - F(a)) / (b-a) = F'(\xi)$$

$$a < \xi < b$$



D'où

$$x^* - x(1) = (x^* - x(1)) F'(\xi) \text{ par } \xi \in [x^*, x^{(0)}]$$

Identiquement pour la 2 de, la 3 ième, et la n ième iteration

$$x^* - x(2) = (x^* - x(1)) F'(\epsilon(1)) \text{ pour } \epsilon(1) \in [x^*, x(1)]$$

$$x^* - x(n) = (x^* - x(n-1)) F'(\epsilon(n-1)) \text{ pour } \epsilon(n-1) \in [x^*, x(n-1)]$$

d'où :

$$(x^*, x(n)) = (x^* - x^{(0)})F'(\varepsilon(0))F'(\varepsilon(1))\dots F'(\varepsilon(n-1))$$

Le processus itératif convergeSSI

$$x(n) \Rightarrow x^* \text{ pour } n \Rightarrow \infty$$

Donc

$$\lim |x^* - x(n)| \Rightarrow 0$$

En notant

$$m = \max |F'(\varepsilon(1))|$$

Pour $i=0$ on aura

$$|x^* - x(n)| < |x^* - x^{(0)}| x^n$$

Remarque :

Si $m < 1$ $(x^* - x(n))$ peut être rendue aussi petite que désirée en augmentant n

Plus $x^{(0)}$ (estime) est proche de x^* / plus le nombre d'itération pour x^* est faible

Plus $F'(x)$ sera petit / plus la convergence sera rapide

On appelle cette fonction de convergence :

$$F'(x^*) = \Phi F(x) / dx \text{ en } x = x^*$$

On peut énoncer qu'une condition suffisante pour que la méthode des substitutions successives (pt fixe) converge est que

$$|F'(x)| < 1, x \in R$$

3) Comportement de l'erreur d'estimation

$$E(n) = x^* - x(n) : \text{erreur à la } n^{\text{ième}} \text{ itération}$$

$$F(x) \text{ continue sur } [a,b]$$

$$F'(x) \text{ Continue et de signe constant sur } [a,b]$$

$$x^* - x(n+1) = (x^* - x(n)) F'(\varepsilon(n))$$

$$\varepsilon \in [x^*, x^n]$$

$$e^{(n+1)} = e^{(n)} F' (e^{(n)})$$

Convergence du premier ordre

Si la methode converge , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n)} = x^* \quad \text{Soit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(n+1)}/e^{(n)} = F'(x^*)$$

4) arret des iterations

Convergence si $|x^{(n)} - x^{(n-1)}|/x^{(n)} < \epsilon$ de l'ordre de 10^{-6}

III) Methode du promoteur de convergence de WOGSTEIN

Cette methode consiste à modifier la methode des substitutions successives de façon à accélérer (ou forcer) systematiquement la convergence avant $x^{(n+1)} = x^{(n)} + \Delta x$ où $\Delta x = F(x^{(n)}) - x^{(n)}$.

Wogstein suggère

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \alpha \Delta x \quad \text{où} \quad \Delta x = F(x^{(n)}) - x^{(n)}$$

Si $F'(x) < -1$ alors la méthode des substitutions diverge (cas c\) car la vitesse caractéristique introduite Δn est trop grande $0 < \alpha < 1/2$ forcera la convergence

Si $-1 < F'(x) < 0$ (figure a\) la convergence est lente , $1/2 < \alpha < 1$ accélèrera cette convergence

Si $0 < F'(x) < 1$ (figure b\) $\alpha > 1$ accélèrera

Si $F'(x) > 1$ (figure d\) la correction Δx oriente la recherche dans une mauvaise direction, $\alpha < 0$ changera cette direction

On demontre

$$\alpha = 1/(1-F'(\epsilon)) \quad \epsilon \in [x^*, x^{(n)}]$$

Comme ϵ est inconnue, on peut l'estimer

$$F'(\epsilon) = (F(x^{(n)}) - F(x^{(n-1)})) / (x^{(n)} - x^{(n-1)})$$

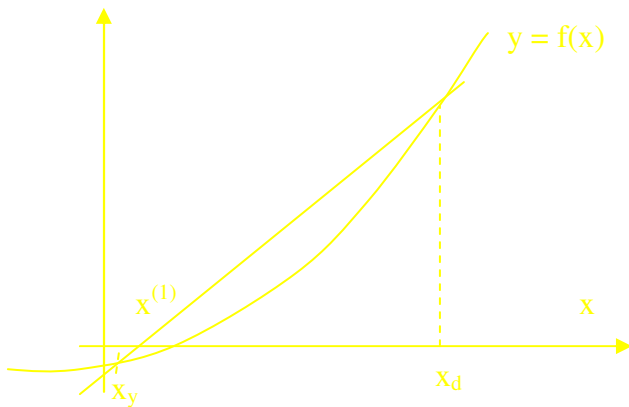
$$F'(\epsilon) = (F(x^{(n)}) - x^{(n)}) / (x^{(n)} - x^{(n-1)})$$

IV) Méthode d'interpolation linéaire (ou régulation) et variantes

$$(x^{(1)} - x_g) / (0 - f(x_n)) = (x_d - x^{(1)}) / (f(x_d) - 0)$$

$$x^{(1)} = (x_g y_d - x_d y_g) / (y_d - y_g)$$

$$\text{ou } f(x_g) + f(x_d) < 0$$



On obtient aussi un estimé $x^{(1)}$ pour continuer il faut trouver l'intervalle $(x_g, x^{(1)})$ ou $(x^{(1)}, x_d)$ qui encadre x^*

Variantes méthode de dichotomie

$$x(k) = x_d - x_g / 2$$

Convergence assurée si $x^* \in [x_g, x_d]$

$$P = y_d y(1)$$

$$\Rightarrow f(x_d) * f(x(1))$$

Si $P < 0$, la racine est entre $x(1)$ et x_d

Soit $x_d = x_d$:

$$x_g = x(1)$$

Si $p > 0$ la racine est entre x_g et $x(1)$

Soit $x_g = x_g$
 $x_d = x(1)$

Calcul du nouveau $x(1)$

Méthode Itineris pégasus

$$\text{Si } P > 0 \quad x_d = x(1) \quad x_g = x_g$$

$$y_d = y(1) \quad y_g = \alpha y_g$$

$$\text{Itineris } \alpha = 1/2$$

$$\text{Pegasus } \alpha = y_d / (y_d + y(1))$$

accélère la convergence

Méthode de la sécante

$$X(k+1) = (x(n-1)y(k) - x(n) y(k-1)) / (y(k) - y(n-1))$$

II) Methode de Newton –raphson

- a) Si $f(x)$ est continue et continuellement dérivable au voisinage de x^* , alors le développement en série de Taylor au voisinage d'un estimé $x(n)$

$$F(x^*) = f(x(n)) + f'(x(n))(x^* - x(n)) + ((x^* - x(n))^2 / 2!) f''(x(n)) + \dots$$

$x(n)$ est proche de x^* ,

$(f(x^*)=0)$ d'où $e(n) = (x^* - x(n))^2$ est négligeable ainsi que les termes de degrés supérieurs

Comme $f(x^*) = 0$ on obtient

$$0 = f(x(n)) + f'(x(n))(x^* - x(n))$$

Donc $e(n) = -f(x(n))/f'(x(n))$

D'où un meilleur « approximé » $x(n+1)$ de x^* sera $x(n+1) = x(n) + e(n)$

$$x(n+1) = x(n) - f(x(n))/f'(x(n))$$

Algorithme de newton raphson

Où $f'(x(n)) \neq 0$

- b) représentation graphique

Voir TD

- c) Convergence de la methode

Théorème : Si $f \in C^2[a,b]$ vérifie

- 1) $f(a)f(b) < 0$
- 2) $\forall x \in [a,b] f'(x) \neq 0$
- 3) $\forall x \in [a,b] f''(x) \neq 0$

Alors en choisissant $x_0 \in [a,b]$

$F(x_0) f''(x_0) > 0$, la suite x_n définie par x_0 et

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n) = F(x_n)$$

Convergence vers l'unique solution x^* de $f(x) = 0$ dans $[a,b]$

d) Evolution de l'erreur

Algorithme NR :

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

Développement de Taylor :

$$f(x^*) = f(x_n) + (x^* - x_n)f'(x_n) + (x^* - x_n)^2/2! f''(x_n) + \dots$$

Avec $f(x^*) = 0$

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1} - x_n) f'(x_n)$$

$$f(x^*) = f(x_n) + (x^* - x_n) f'(x_n) + (x^* - x_n)^2/2! f''(x_n) + \dots$$

On obtient

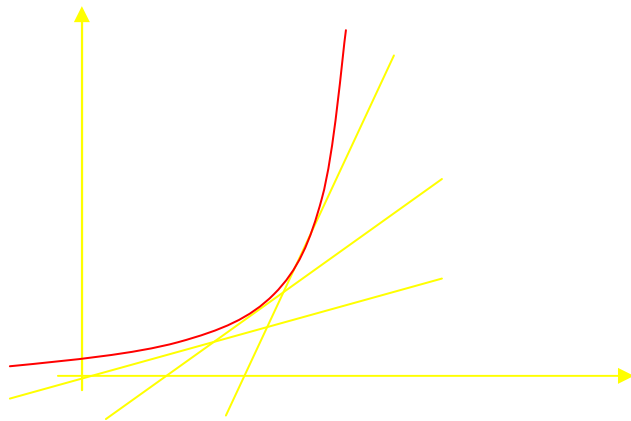
$$E_{n+1} = -f''(x_n) [E_n]^2 / f'(x_n)$$

La convergence est dite quadratique

VI) Méthode de Von Mises

On remplace $f'(x^n)$ par $f'(x^0) = \text{cte}$ dans l'ité de N.R.

Intérêt : Bien que moins rapide que N.R. on ne calcule plus $f'(x_n)$



8) Approximation de la dérivée première

$$f'(x^*) = (f(x_n) - f(x_{n-1})) / (x_n - x_{n-1})$$

Remarque :

Si l'on remplace par cette expression $f'(x_n)$ dans N.R., on retrouve la méthode de la sécante